

Charakterisierungen spezieller windschiefer Regelflächen durch die Normalkrümmung ausgezeichneter Flächenkurven

Stylios S. Stamatakis

Abteilung für Mathematik
der Aristoteles Universität Thessaloniki
GR-54124 Thessaloniki, Griechenland
e-mail: stamata@math.auth.gr

Abstract

We consider ruled surfaces in the three-dimensional Euclidean space and some geometrically distinguished families of curves on them whose normal curvature has a concrete form. The aim of this paper is to find and classify all ruled surfaces with the mentioned property

MSC 2010: 53A25, 53A05

Keywords: Ruled surfaces, normal curvature, principal curvatures, Edlinger-surfaces, helicoid

1 Einleitung

Geometrisch ausgezeichnete Kurvenscharen auf windschiefen Regelflächen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 sind von verschiedenen Autoren vielfach untersucht worden. Eine Reihe von Resultaten ergeben sich, wenn man fordert, dass die betrachtete Kurvenschar eine zusätzliche Eigenschaft besitzt. Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zu diesem Themenkreis. Wir betrachten spezielle Kurvenscharen auf einer windschiefen Regelfläche und nehmen an, dass die Normalkrümmung längs jeder dieser Kurven eine bestimmte Gestalt besitzt. Unser Ziel ist die Klassifikation der Regelflächen mit der geforderten Eigenschaft.

Im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 sei Φ eine reguläre und von torsalen Erzeugenden freie Regelfläche mit der Striktionslinie $\mathbf{s} = \mathbf{s}(u)$ und dem Erzeugendeneinheitsvektor

$\mathbf{e}(u)$. Φ sei über dem Definitionsgebiet $G := I \times \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall) von der Klasse C^3 . Eine Parameterdarstellung von Φ lautet dann

$$(1) \quad \mathbf{x}(u, v) = \mathbf{s}(u) + v \mathbf{e}(u), \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Annahme gilt

$$(2) \quad \langle \mathbf{s}'(u), \mathbf{e}'(u) \rangle = 0 \quad \forall u \in I,$$

wobei Strich Ableitung nach u und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im Raume \mathbb{R}^3 bedeuten. Den Parameter u wählen wir so, dass

$$(3) \quad |\mathbf{e}'(u)| = 1 \quad \forall u \in I$$

gilt.

Längs der Striktionslinie betrachten wir das begleitende Dreibein $\{\mathbf{e}(u), \mathbf{n}(u), \mathbf{z}(u)\}$, wobei $\mathbf{n}(u) := \mathbf{e}'(u)$ der *Zentralnormalenvektor* und $\mathbf{z}(u) := \mathbf{e}(u) \times \mathbf{n}(u)$ der *Zentraltangentialvektor* von Φ ist. Es gelten folgende Ableitungsgleichungen :

$$(4) \quad \mathbf{e}'(u) = \mathbf{n}(u), \quad \mathbf{n}'(u) = -\mathbf{e}(u) + k(u) \mathbf{z}(u), \quad \mathbf{z}'(u) = -k(u) \mathbf{n}(u),$$

wobei

$$(5) \quad k(u) = (\mathbf{e}(u), \mathbf{e}'(u), \mathbf{e}''(u))$$

die *konische Krümmung* von Φ bedeutet. Für den *Drall* $\delta(u)$ und die *Striktion* $\sigma(u)$ von Φ haben wir

$$(6) \quad \delta(u) = (\mathbf{e}(u), \mathbf{e}'(u), \mathbf{s}'(u)), \quad \sigma(u) := \angle(\mathbf{e}(u), \mathbf{s}'(u))$$

($-\frac{\pi}{2} < \sigma \leq \frac{\pi}{2}$, $\text{sign } \sigma = \text{sign } \delta$). Die Funktionen $k(u)$, $\delta(u)$ und $\sigma(u)$ bilden bekanntlich ein vollständiges Invariantensystem von Φ (vgl. [3], S.19).

Die Koordinatenfunktionen g_{ij} bzw. h_{ij} des ersten bzw. zweiten Fundamental-tensors bezüglich der (lokalen) Koordinaten $u^1 := u$, $u^2 := v$ lauten

$$(7) \quad \begin{cases} (g_{ij}) = \begin{pmatrix} v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1) & \delta \lambda \\ \delta \lambda & 1 \end{pmatrix} \\ (h_{ij}) = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} -[k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)] & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \end{cases},$$

mit $w := \sqrt{v^2 + \delta^2}$.

Für die Gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H von Φ gelten die Beziehungen

$$(8) \quad K = \frac{-\delta^2}{w^4}, \quad H = -\frac{k v^2 + \delta' v + \delta^2(k + \lambda)}{2 w^3},$$

wobei $\lambda := \cot \sigma$ gesetzt wurde.

Eine windschiefe Regelfläche Φ , deren sämtliche Schmiegquadriken Drehhyperboloide sind, bezeichnet man bekanntlich als *Eddinger-Fläche* [2], [3]. Hinreichende und notwendige Bedingungen dafür sind die Beziehungen ([1], S.103)

$$(9) \quad \delta' = k \lambda + 1 = 0.$$

Es handelt sich um eine konstant gedrahte Regelfläche mit der Striktionslinie als Krümmungslinie. Die *Kurven konstanten Striktionsabstandes*, d.h. die Kurven $v = \text{konst.}$, sind in diesem Fall Krümmungslinien von Φ . Die andere Krümmungslinienschar wird durch

$$[k^2 v^2 + \delta^2(k^2 + 1)] du - \delta k dv = 0$$

bestimmt. Die zugehörigen Normalkrümmungen der beiden Krümmungslinien (Hauptkrümmungen) lauten

$$(10) \quad k_1 = -k(u) w^{-1}, \quad k_2 = \frac{\delta^2(u)}{k(u)} w^{-3}.$$

2 Der Fall der Hauptkrümmungen

Im folgenden betrachten wir *ausschließlich windschiefe Regelflächen des Raumes \mathbb{R}^3 mit der Parameterdarstellung (1), die die Voraussetzungen (2) und (3) erfüllen.*

Ausgehend von (10) stellen wir zunächst die Aufgabe, *alle Regelflächen zu bestimmen, deren eine Hauptkrümmung die Gestalt*

$$(11) \quad k_i = f(u) w^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad f(u) \in C^0(I), \quad i = 1 \text{ oder } 2,$$

besitzt. Es ist offenbar $f(u) \neq 0 \forall u \in I$, denn Φ ist windschief.

Für die Normalkrümmung in Richtung $du : dv$ findet man unter Beachtung von (7)

$$(12) \quad k_N = \frac{1}{w} \cdot \frac{-[k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)] du^2 + 2 \delta du dv}{[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)] du^2 + 2 \delta \lambda du dv + dv^2},$$

woraus mit (11)

$$\begin{aligned} & [f w^{n+1} [v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)] + k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)] du^2 \\ & + 2 \delta (f \lambda w^{n+1} - 1) du dv + f w^{n+1} dv^2 = 0 \end{aligned}$$

folgt. Diese in $du : dv$ quadratische Gleichung besitzt genau dann *eine* Lösung, wenn ihre Diskriminante verschwindet:

$$(13) \quad f^2 w^{2n+4} + f [k v^2 + \delta' v + \delta^2(k + \lambda)] w^{n+1} - \delta^2 = 0 \quad \forall u \in I, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Es sei zunächst $n = 0$. Dann erhalten wir aus (13)

$$f^4(v^2 + \delta^2)^4 - 2f^2\delta^2(v^2 + \delta^2)^2 + \delta^4 - f^2[kv^2 + \delta'v + \delta^2(k + \lambda)]^2(v^2 + \delta^2) = 0.$$

Auf der linken Seite steht ein Polynom achten Grades in v , das für jedes $u \in I$ und unendlich viele Werte $v \in \mathbb{R}$ zu erfüllen ist. Durch Koeffizientenvergleich mit dem Nullpolynom ergibt sich $f = 0$, also ein Widerspruch.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

Fall I: Es sei n ungerade. Die Beziehung (13) erhält die Gestalt

$$(14) \quad \begin{aligned} Q(v) &:= f[kv^2 + \delta'v + \delta^2(k + \lambda)](v^2 + \delta^2)^{\frac{n+1}{2}} \\ &\quad + f^2(v^2 + \delta^2)^{n+2} - \delta^2 = 0 \quad \forall u \in I, v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ist $n \geq 1$, so liefert das Verschwinden des Koeffizienten des höchsten Grades des Polynoms $Q(v)$ $f = 0$, was nicht möglich ist.

Es sei $n = -1$. Dann wird (14)

$$Q(v) = f^2(v^2 + \delta^2) + f[kv^2 + \delta'v + \delta^2(k + \lambda)] - \delta^2 = 0.$$

Aus dem Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ erhalten wir

$$f = -k, \quad \delta' = k\lambda + 1 = 0,$$

d.h. Φ muss eine Edlinger-Fläche sein.

Es sei $n = -3$ und k_1 die Hauptkrümmung, die die Gestalt (11) besitzt, d.h.

$$k_1 = f(u)w^{-3}.$$

Dann erhalten wir aus (8) für die andere Hauptkrümmung

$$k_2 = f^*(u)w^{-1} \text{ mit } f^*(u) := \frac{-\delta^2(u)}{f(u)},$$

d.h. eine Hauptkrümmung von Φ hat die Gestalt (11), wobei $n = -1$ ist. Wie wir im vorangehenden Fall gesehen haben, ist Φ wieder eine Edlinger-Fläche.

Der Fall $n \leq -5$ führt auf einen Widerspruch, wie man leicht feststellen kann.

Fall II: Es sei n gerade. Für $n = -2$ folgt aus (13)

$$Q(v) := f^2[kv^2 + \delta'v + \delta^2(k + \lambda)]^2 - (f^2 - \delta^2)^2(v^2 + \delta^2) = 0 \quad \forall u \in I, v \in \mathbb{R}.$$

Das Verschwinden des Koeffizienten f^2k^2 der Potenz höchsten Grades des Polynoms $Q(v)$ liefert $k = 0$. Aus dem Verschwinden der übrigen Koeffizienten folgt

$$f^2\delta'^2 - (f^2 - \delta^2)^2 = 2f^2\delta^2\delta'\lambda = f^2\delta^4\lambda^2 - \delta^2(f^2 - \delta^2)^2 = 0,$$

woraus wir

$$\delta' = \lambda = 0 \quad \text{und} \quad f = \pm \delta$$

erhalten. Es handelt sich also in diesem Fall um eine Wendelfläche.

Die Fälle $n \geq 2$ und $n \leq 4$ führen auf Widersprüche, wie man leicht zeigen kann.

Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen:

Proposition 1 *Es sei $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ eine windschiefe C^3 -Regelfläche, deren eine Hauptkrümmung die Gestalt (11) besitzt. Dann gilt eine der folgenden Eigenschaften:*

- (a) $n = -1$, $f(u) = -k(u)$ und Φ ist eine Edlinger-Fläche.
- (b) $n = -2$, $f(u) = \pm \delta(u)$ und Φ ist eine Wendelfläche.
- (c) $n = -3$, $f(u) = \delta^2(u) k^{-1}(u)$ und Φ ist eine Edlinger-Fläche.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar folgendes

Corollary 2 *Es sei $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ eine windschiefe C^3 -Regelfläche, zwischen deren Hauptkrümmungen die Beziehung*

$$(15) \quad \delta^2 k_1^3 + k^4 k_2 = 0$$

bestehe. Dann ist Φ eine Edlinger-Fläche.

Proof. Auf Grund von (8) und (15) folgt

$$k_1^4 = k^4 w^{-4}$$

und daraus

$$k_1 = \pm k w^{-1}.$$

Wegen Satz 1 ist aber

$$k_1 = -k w^{-1}.$$

Somit besitzt die Hauptkrümmung k_1 die Gestalt (11), wobei $n = -1$ ist. Daher ist Φ eine Edlinger-Fläche. ■

3 Der Fall der Normalkrümmung

Darüber hinaus betrachten wir weitere geometrisch ausgezeichnete Kurvenscharen auf Φ , längs deren die Normalkrümmung die Gestalt

$$(16) \quad k_N = f(u)w^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad f(u) \in C^0(I)$$

besitzt. Unser Ziel ist die Bestimmung dieser Regelflächen.

3.1. Es sei S_1 die Schar der Kurven konstanten Striktionsabstandes. Nach (12) lautet die Normalkrümmung längs einer Kurve von S_1

$$(17) \quad k_N = \frac{1}{w} \cdot \frac{-k v^2 - \delta' v + \delta^2 (k - \lambda)}{v^2 + \delta^2 (\lambda^2 + 1)}$$

und hat genau dann die Gestalt (16), wenn

$$(18) \quad f w^{n+1} [v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)] + k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda) = 0.$$

Offensichtlich ist genau dann $f = 0$, wenn

$$(19) \quad k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda) = 0$$

identisch in v gilt, d.h. genau dann, wenn

$$k = \delta' = \lambda = 0,$$

also wenn Φ eine Wendelfläche ist.

Es sei nun $f \neq 0$. Für $n = -1$ folgt aus (18)

$$Q(v) := f[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)] + k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda) = 0.$$

Das Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ liefert

$$f = -k, \quad \delta' = 0, \quad \lambda(k\lambda + 1) = 0.$$

Somit ist die Regelfläche Φ entweder ein konstant gedrahtes Orthoid ($\delta' = \lambda = 0$) oder eine Edlinger-Fläche ($\delta' = k\lambda + 1 = 0$).

Für $n > -1$ folgt aus (18)

$$Q(v) := f^2(v^2 + \delta^2)^{n+1}[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)]^2 - [k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)]^2 = 0.$$

Aus dem Verschwinden des Koeffizienten des höchsten Grades des Polynoms $Q(v)$ folgt $f = 0$. Dies ist aber nicht möglich.

Für $n < -1$ folgt aus (18)

$$Q(v) := (v^2 + \delta^2)^{-n-1}[k v^2 + \delta' v + \delta^2(k - \lambda)]^2 - f^2[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)]^2 = 0.$$

Das Verschwinden des Koeffizienten des höchsten Grades des Polynoms $Q(v)$ liefert $k = 0$ und demnach

$$(20) \quad Q(v) = (v^2 + \delta^2)^{-n-1}(\delta' v - \delta^2 \lambda)^2 - f^2[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)]^2 = 0.$$

Ist $n = -2$, so erhält $Q(v)$ die Gestalt

$$(21) \quad Q(v) = (v^2 + \delta^2)(\delta' v - \delta^2 \lambda)^2 - f^2[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)]^2 = 0.$$

Aus dem Verschwinden der Koeffizienten von $Q(v)$ folgt $f = 0$, also ein Widerspruch. Für $n < -2$ liefert das Verschwinden des Koeffizienten des höchsten Grades des Polynoms $Q(v)$ in (20) $\delta' = 0$ und daher

$$(22) \quad Q(v) = \delta^4 \lambda^2 (v^2 + \delta^2)^{-n-1} - f^2[v^2 + \delta^2(\lambda^2 + 1)]^2 = 0.$$

Für $n = -3$ ist

$$Q(v) = \delta^4 \lambda^2 (v^2 + \delta^2)^2 - f^2 [v^2 + \delta^2 (\lambda^2 + 1)]^2 = 0.$$

Aus dem Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ folgt wieder $f = 0$, also ein Widerspruch.

Für $n < -3$ erhalten wir aus (22)

$$\lambda = f = 0,$$

was ebenfalls unmöglich ist.

Somit ist folgender Satz bewiesen:

Proposition 3 *Die Normalkrümmung längs der Kurven konstanten Striktionsabstandes einer windschiefen C^3 -Regelfläche $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ besitze die Gestalt (16). Dann gilt eine der folgenden Eigenschaften:*

- (a) $f = 0$ und Φ ist eine Wendelfläche.
- (b) $n = -1$, $f(u) = -k(u)$ und Φ ist ein konstant gedrahtes Orthoid oder eine Edlinger-Fläche.

3.2. Es sei S^2 die Schar der Orthogonaltrajektorien der Schar S^1 . Sie ist durch

$$[v^2 + \delta^2 (\lambda^2 + 1)] du + \delta \lambda dv = 0$$

bestimmt. Nach (12) lautet die zugehörige Normalkrümmung

$$(23) \quad k_N = \frac{1}{w^3} \cdot \frac{-\delta^2 \lambda [(k \lambda + 2) v^2 + \delta' \lambda v + \delta^2 (\lambda^2 + k \lambda + 2)]}{v^2 + \delta^2 (\lambda^2 + 1)}$$

und hat genau dann die Gestalt (16), wenn gilt

$$(24) \quad f w^{n+3} [v^2 + \delta^2 (\lambda^2 + 1)] + \delta^2 \lambda [(k \lambda + 2) v^2 + \delta' \lambda v + \delta^2 (\lambda^2 + k \lambda + 2)] = 0.$$

Es ist $f = 0$ genau dann, wenn

$$\lambda [(k \lambda + 2) v^2 + \delta' \lambda v + \delta^2 (\lambda^2 + k \lambda + 2)] = 0$$

identisch in v gilt. Wäre $\lambda \neq 0$, so würden wir folgern

$$k \lambda + 2 = \delta' \lambda = \delta^2 (\lambda^2 + k \lambda + 2) = 0,$$

was nicht möglich ist. Somit ist $f = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$, d.h. wenn Φ ein Orthoid ist.

Es sei nun $f \lambda \neq 0$. Für $n = -3$ folgt aus (24)

$$(25) \quad Q(v) := f [v^2 + \delta^2 (\lambda^2 + 1)] + \delta^2 \lambda [(k \lambda + 2) v^2 + \delta' \lambda v + \delta^2 (\lambda^2 + k \lambda + 2)] = 0.$$

Aus dem Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ erhalten wir

$$f = -\delta^2 \lambda (k \lambda + 2), \quad \delta' = 0, \quad k \lambda + 1 = 0,$$

somit haben wir $f = -\delta^2 \lambda$ und die Regelfläche Φ ist eine Edlinger-Fläche.

Man überzeugt sich leicht, dass die Fälle $n > -3$ und $n < -3$ auf Widersprüche führen. Somit gilt der

Proposition 4 *Die Normalkrümmung längs der Orthogonaltrajektorien der Kurven konstanter Striktionsabstandes einer windschiefen C^3 -Regelfläche $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ besitze die Gestalt (16). Dann gilt eine der folgenden Eigenschaften:*

(a) $f = 0$ und Φ ist ein Orthoid.

(b) $n = -3$, $f(u) = \delta^2(u) k^{-1}(u)$ und Φ ist eine Edlinger-Fläche.

3.3. Es sei S^3 die Schar der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden, die durch

$$\delta \lambda du + dv = 0$$

bestimmt ist. Nach (12) lautet die zugehörige Normalkrümmung

$$(26) \quad k_N = \frac{-k v^2 - \delta' v - \delta^2 (k + \lambda)}{w^3}$$

und hat genau dann die Gestalt (16), wenn gilt

$$(27) \quad f w^{n+3} + k v^2 + \delta' v + \delta^2 (k + \lambda) = 0.$$

Es ist $f = 0$ genau dann, wenn (19) identisch in v gilt, d.h. genau dann, wenn

$$k = \lambda = \delta' = 0,$$

also wenn Φ eine Wendelfläche ist.

Es sei nun $f \neq 0$. Für $n = -3$ folgt aus (27)

$$(28) \quad Q(v) := k v^2 + \delta' v + \delta^2 (k + \lambda) + f = 0.$$

Das Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ liefert

$$f = -\delta^2 \lambda, \quad k = 0, \quad \delta' = 0.$$

Somit ist die Regelfläche Φ ein konstant gedrahtes Konoid.

Für $n = -2$ folgt aus (27)

$$Q(v) := f^2(v^2 + \delta^2) - [k v^2 + \delta' v + \delta^2 (k + \lambda)]^2 = 0.$$

Aus dem Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ folgt

$$k = 0, \quad f^2 = \delta'^2, \quad \delta' \lambda = 0, \quad f^2 = \delta^2 \lambda^2 = 0,$$

also $f = 0$, d.h. ein Widerspruch.

Für $n = -1$ folgt aus (27)

$$Q(v) := f(v^2 + \delta^2) + k v^2 + \delta' v + \delta^2(k + \lambda) = 0.$$

Aus dem Verschwinden der Koeffizienten des Polynoms $Q(v)$ folgt $f = -k, \delta' = 0, \lambda = 0$. Somit ist Φ ein konstant gedrahtes Orthoid.

Die Fälle $n \geq 0$ und $n \leq -4$ führen auf Widersprüche, wie man leicht zeigen kann. Daher gilt:

Proposition 5 *Die Normalkrümmung längs der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden einer windschiefen C^3 -Regelfläche $\Phi \in \mathbb{R}^3$ besitze die Gestalt (16). Dann gilt eine der folgenden Eigenschaften:*

- (a) $f = 0$ und Φ ist eine Wendelfläche.
- (b) $n = -3$, $f(u) = -\delta^2(u) \lambda(u)$ und Φ ist ein konstant gedrahtes Konoid.
- (c) $n = -1$, $f(u) = -k(u)$ und Φ ist ein konstant gedrahtes Orthoid.

3.4. Es sei S^4 die Schar der Kurven konstanter Gaußscher Krümmung, d.h. die Schar der Kurven längs denen die Gaußsche Krümmung konstant ist [4]. Sie ist durch

$$\delta'(\delta^2 - v^2) du + 2\delta v dv = 0$$

bestimmt. Nach (12) lautet die zugehörige Normalkrümmung

$$(29) \quad k_N = \frac{-1}{w} \cdot \frac{4\delta^2 v [k v^3 + \delta^2 (k - \lambda) v + \delta^2 \delta']}{A}$$

wobei

$$A = (4\delta^2 + \delta'^2) v^4 + 4\delta^2 \delta' \lambda v^3 + 2\delta^2 [2\delta^2 (\lambda^2 + 1) - \delta'^2] v^2 - 4\delta^4 \delta' \lambda v + \delta^4 \delta'^2$$

gesetzt wurde, und hat genau dann die Gestalt (16), wenn gilt:

$$(30) \quad f w^{n+1} [(4\delta^2 + \delta'^2) v^4 + 4\delta^2 \delta' \lambda v^3 + 2\delta^2 [2\delta^2 (\lambda^2 + 1) - \delta'^2] v^2 - 4\delta^4 \delta' \lambda v + \delta^4 \delta'^2] + 4\delta^2 v [k v^3 + \delta^2 (k - \lambda) v + \delta^2 \delta'] = 0.$$

Es ist $f = 0$ genau dann, wenn

$$k v^3 + \delta^2 (k - \lambda) v + \delta^2 \delta' = 0$$

identisch in v erfüllt ist, d.h. genau dann, wenn

$$k = \lambda = \delta' = 0,$$

also wenn Φ eine Wendelfläche ist.

Es sei im Folgenden $f \neq 0$. Für $n = -1$ folgt aus (30)

$$(31) \quad Q(v) := f[(4\delta^2 + \delta'^2)v^4 + 4\delta^2 \delta' \lambda v^3 + 2\delta^2[2\delta^2(\lambda^2 + 1) - \delta'^2]v^2 - 4\delta^4 \delta' \lambda v + \delta^4 \delta'^2] + 4\delta^2 v[k v^3 + \delta^2(k - \lambda)v + \delta^2 \delta'] = 0.$$

Die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_4 &:= f(4\delta^2 + \delta'^2) + 4\delta^2 k, & a_3 &:= 4f\delta^2 \delta' \lambda, \\ a_2 &:= 2f\delta^2[2\delta^2(\lambda^2 + 1) - \delta'^2] + 4\delta^4(k - \lambda), \\ a_1 &:= -4f\delta^4 \delta' \lambda + 4\delta^4 \delta', & a_0 &:= f\delta^4 \delta'^2 \end{aligned}$$

des Polynoms $Q(v)$ müssen verschwinden. Aus $a_0 = 0$ folgt $\delta' = 0$ und sodann aus $a_2 = a_4 = 0$, dass

$$f = -k, \quad \lambda(k\lambda + 1) = 0$$

gilt. Folglich ist die Regelfläche Φ entweder ein konstant gedrahtes Orthoid ($\delta' = \lambda = 0$) oder eine Edlinger-Fläche ($\delta' = k\lambda + 1 = 0$).

Die Fälle $n > -1$ und $n < -1$ führen auf Widersprüche. Wir haben somit folgenden Satz bewiesen:

Proposition 6 *Die Normalkrümmung längs der Kurven konstanten Gaußscher Krümmung einer windschiefen C^3 -Regelfläche $\Phi \in \mathbb{R}^3$ besitze die Gestalt (16). Dann gilt eine der folgenden Eigenschaften:*

- (a) $f = 0$ und Φ ist eine Wendelfläche.
- (b) $n = -1$, $f(u) = -k(u)$ und Φ ist ein konstant gedrahtes Orthoid oder eine Edlinger-Fläche.

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die obigen Resultate.

Normalkrümmung der Gestalt $k_N = f w^n$ längs	f	n	Art der Regelfläche
einer der Krümmungslinien	$-k$ $\pm \delta$ $\delta^2 k^{-1}$	-1 -2 -3	\cdot Edlinger-Fläche \cdot Wendelfläche \cdot Edlinger-Fläche
der Kurven konstanten Striktionsabstandes	0 $-k$	$-$ -1	\cdot Wendelfläche \cdot konstant gedrahtes Orthoid oder Edlinger-Fläche
der Orthogonaltrajektorien der Kurven konstanten Striktionsabstandes	0 $\delta^2 k^{-1}$	$-$ -3	\cdot Orthoid \cdot Edlinger-Fläche
der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden	0 $-k$ $-\delta^2 \lambda$	$-$ -1 -3	\cdot Wendelfläche \cdot konstant gedrahtes Orthoid \cdot konstant gedrahtes Konoid
der Kurven konstanter Gaußscher Krümmung	0 $-k$	$-$ -1	\cdot Wendelfläche \cdot konstant gedrahtes Orthoid oder Edlinger-Fläche

References

- [1] H. Brauner: Über Strahlflächen von konstantem Drall. Monatsh. Math. **63** (1959), 101-111.
- [2] R. Edlinger: Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind. S.-B. Akad. Wiss. Wien **132** (1923), 243-351.
- [3] J. Hoschek: Liniengeometrie. Bibliographisches Institut, Zürich 1971.
- [4] H. Sachs: Einige Kennzeichnungen der Edlinger-Flächen. Monatsh. Math. **77** (1973), 241-250.